

$$E_k \quad y'' = y^k.$$

On se propose d'étudier dans le demi-plan ouvert P caractérisé par $y > 0$ l'ensemble S_k des solutions maximales f de E_k qui vérifient la condition supplémentaire $f'(0) = 0$. On pose $f(0) = m > 0$: on note γ le graphe de f et Γ_k l'ensemble des courbes intégrales γ de E_k lorsque f décrit S_k .

I

Cette partie est consacrée à l'étude de trois cas particuliers.

1° On suppose d'abord k nul.

a) Trouver les solutions $f \in S_0$. Quel est leur intervalle I de définition ? Que sont les courbes intégrales $\gamma \in \Gamma_0$?

b) Discuter, suivant la position du point (x_1, y_1) dans P , le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_0$ passant par (x_1, y_1) .

2° Résoudre les mêmes questions lorsque $k = 1$.

3° Dans toute la suite de la partie I, on suppose $k = -1$.

a) Montrer sans calculs qu'il existe une et une seule solution $f_0 \in S_{-1}$ pour laquelle $f_0(0) = 1$. Vérifier que toutes les autres solutions $f \in S_{-1}$ sont données par $f(x) = m f_0\left(\frac{x}{m}\right)$. Comment déduit-on le graphe de f de celui de f_0 ?

b) Quel est le sens de la concavité et quels sont les sens de variation de $f \in S_{-1}$?

4° a) Pour $f \in S_{-1}$, $x \geq 0$ et $y = f(x)$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $Y = \frac{y}{m}$ et en déduire l'ensemble des valeurs et l'intervalle de définition de f .

b) Dans les mêmes conditions, montrer que $\frac{x}{y} = F(Y)$ où F est la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$F(Y) = \frac{1}{Y} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}.$$

c) Montrer que, lorsque Y tend vers $+\infty$, $F(Y)$ tend vers 0 (on pourra diviser l'intervalle d'intégration $[1, Y]$ en deux intervalles $[1, A]$ et $[A, Y]$ avec un choix convenable du réel A). En déduire la nature des branches infinies de γ .

d) Montrer que, sur $]1, +\infty[$, la dérivée F' de F s'annule pour une et une seule valeur Y_0 de Y , et que $y' = f'(x) = \frac{y}{x}$ lorsque $Y = Y_0$.

e) Discuter, suivant la position du point (x_1, y_1) dans le quart de plan Q caractérisé par $x_1 \geq 0$, $y_1 > 0$, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_{-1}$ passant par (x_1, y_1) et exprimer en fonction de Y_0 la pente de la demi-droite D située dans Q à laquelle les courbes γ sont toutes tangentes.

5° Soit φ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $\varphi(Y) = \frac{Y}{\sqrt{2 \ln Y}}$.

a) Pour quelle valeur Y_1 de Y la fonction φ atteint-elle son minimum et quelle est la valeur de ce minimum ?

b) A l'aide du changement de variable $t = e^{\frac{u^2}{2}}$, comparer $\int_1^{Y_1} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}$ à la valeur minimale de φ , puis comparer Y_0 à Y_1 et en déduire que la pente de D est strictement supérieure à 1.

II

Dans toute la suite du problème, on suppose $k > -1$. Lorsque cela simplifiera les notations, on utilisera le paramètre $\alpha = \frac{k+1}{2} > 0$.

6° a) Pour $m > 0$ donné, combien y a-t-il de solutions $f \in S_k$ telles que $f(0) = m$?

b) Si f est une telle solution, définie sur un intervalle I , comparer à f la fonction g définie sur l'intervalle J symétrique de I par rapport à 0 par $g(x) = f(-x)$. L'intervalle I est-il symétrique par rapport à 0 ?

c) Quel est le sens de la concavité et quels sont les sens de variation de f ?

7° a) Pour $f \in S_k$, $x \geq 0$ et $y = f(x)$, exprimer $y' = f'(x)$ en fonction de y, m et α , puis x en fonction de ces mêmes trois nombres réels, sous forme d'une intégrale. Pour quelles valeurs de α l'intervalle I de définition de f est-il borné ? Exprimer dans ce cas les bornes de I en fonction de m , de α , et d'une intégrale ne dépendant que de α , et indiquer le comportement de γ aux extrémités de I .

b) Dans le cas où I est non borné, montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ ont la même limite. Quelle est la nature des branches infinies de γ ?

III

L'objet de cette partie est l'étude de la distribution dans le quart de plan Q caractérisé par $x \geq 0$ et $y > 0$ de la partie des courbes $\gamma \in S_k$ correspondant à $x \geq 0$. On utilisera dans ce but la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par

$$F(Y) = \sqrt{\alpha} Y^{\alpha-1} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}}.$$

8° Soit $x \geq 0$ l'abscisse du point d'ordonnée $y \geq m > 0$ situé dans Q sur la courbe $\gamma \in S_k$ passant par $(0, m)$. Montrer que

$$y^{\alpha-1}x = F\left(\frac{y}{m}\right).$$

9° On suppose d'abord $k \geq 0$, c'est-à-dire $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

a) Soit f_1 et f_2 deux solutions de l'ensemble S_k telles que $f_1(0) = m_1 < m_2 = f_2(0)$. S'il existe des réels $x > 0$ tels que $f_1(x) \geq f_2(x)$, soit $\xi > 0$ leur borne inférieure. En comparant sur l'intervalle $[0, \xi]$ f_1' à f_2' puis f_1 à f_2 , montrer que l'existence de ξ est contradictoire.

b) En déduire que F est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Si de plus $\alpha \geq 1$, quel est l'ensemble des valeurs de F sur $[1, +\infty[$? En déduire le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par un point (x_1, y_1) fixé dans Q .

10° Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

a) Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \leq \frac{1}{2(s-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

b) En déduire que

$$\lim_{Y \rightarrow +\infty} F(Y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}.$$

(On pourra, dans l'intégrale qui intervient dans la définition de F , diviser l'intervalle d'intégration $[1, Y]$ en deux intervalles $[1, 2]$ et $[2, Y]$ par exemple.)

c) Si $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, déduire de ce qui précède, selon la position du point (x_1, y_1) dans Q , le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par (x_1, y_1) et dessiner schématiquement la courbe séparant les deux régions obtenues.

11° On s'intéresse désormais *exclusivement* au cas restant à étudier, c'est-à-dire celui où $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

a) Montrer que la dérivée F' de F s'annule au plus une fois sur $]1, +\infty[$.

b) Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \geq \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

et en déduire, lorsque $\alpha \leq \frac{1}{3}$, la limite de $Y^{2-\alpha}F'(Y)$ pour Y tendant vers $+\infty$.

c) Lorsque $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$, montrer que F' s'annule pour une et une seule valeur de Y , notée Y_0 , et calculer le maximum de F en fonction de Y_0 et α .

d) Toujours pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$, déduire de ce qui précède, selon la position du point (x_1, y_1) dans Q , le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par (x_1, y_1) et dessiner schématiquement les courbes séparant les diverses régions obtenues. Trouver dans Q une courbe tangente en chacun de ses points à l'une des courbes $\gamma \in \Gamma_k$.

12° On suppose enfin que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

a) Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right) dt$$

est convergente et que la fonction ψ définie par

$$\psi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right) dt + \frac{1}{\alpha-1}$$

est décroissante sur $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$. Quelle est la valeur de $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$? Quel est le signe de ψ sur l'intervalle $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$?

b) En déduire que F' s'annule une fois et une seule sur $]1, +\infty[$ lorsque $\alpha \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$.

c) Les résultats obtenus dans la question 11° d) s'étendent-ils au cas où $\alpha \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$?

Excellente application du
Th. de Cauchy - Lipschitz.

Polytechnique 90
RMS 90-91 n° 6553

© Nuceito août 92

(Indications p 28)

Étude qualitative de solutions
strictement positives de
l'équation différentielle $y'' = y^k$

SOLUTION :

I.1.a $y'' = 1$ donne $y = \frac{x^2}{2} + m$. S_0 est constitué des fonctions $f(x) = \frac{x^2}{2} + m$ définies sur \mathbb{R} . Les courbes intégrales de Γ_0 sont des paraboles de sommets dans $P_{(0,y)}$ et de paramètre 1.



I.1.b $f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{x_1^2}{2} + m \Leftrightarrow m = y_1 - \frac{x_1^2}{2}$

• Si $y_1 - \frac{x_1^2}{2} > 0$, une seule courbe de Γ_0 passe par (x_1, y_1)

• Si $y_1 - \frac{x_1^2}{2} \leq 0$, aucune courbe de Γ_0 ne passe par (x_1, y_1) .

I.2 $y'' = y$ se résout en $y = ae^x + be^{-x}$. Compte tenu de $f'(0) = 0$ et $f(0) = m$, on obtient les solutions suivantes de S_1 :

$$f(x) = \frac{m}{2} (e^x + e^{-x}) = m \operatorname{ch} x$$

Les courbes intégrales de Γ_1 se déduisent de la chaînette $y = \operatorname{ch} x$ par des affinités orthogonales de base Ox , de direction Oy et de rapport $m > 0$.

Enfin $f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{m}{2} (e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow m = \frac{2y_1}{e^x + e^{-x}}$, donc:

- Si $y_1 > 0$, il existe une seule courbe de Γ_0 passant par (x_1, y_1)
- Si $y_1 \leq 0$, il n'y en a pas.

I.3.a

$$E_{-1} : y'' = \frac{1}{y}$$

L'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est C^1 et l'on peut appliquer
 $(x, y, y') \mapsto \frac{1}{y}$

le Th de Cauchy - Lipschitz : il existe une unique solution maximale f_0 de E_{-1} vérifiant les conditions initiales $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$

Vérifions qu'il s'agit de $f(x) = m f_0\left(\frac{x}{m}\right)$:

$$f'(x) = f_0'\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{m} f_0''\left(\frac{x}{m}\right)$$

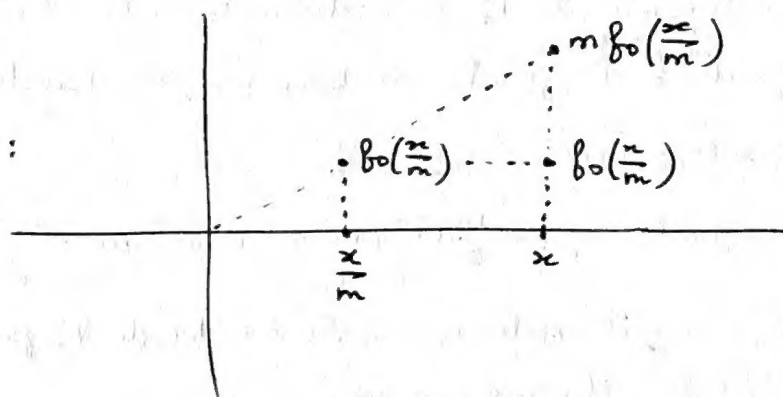
donc $f''(x) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{f_0\left(\frac{x}{m}\right)} = \frac{1}{f(x)}$ ie f est solution de E_- .

De plus $\begin{cases} f(0) = m f_0(0) = m \\ f'(0) = f_0'(0) = 0 \end{cases}$

f est définie sur $I_m = mI$, et I_m est l'intervalle maximum sur lequel est défini f (car f défini sur $J \supset I_m$ entraîne $f_0(t) = \frac{1}{m} f(tm)$ défini sur $\frac{1}{m} J \supset I$ et solution de E_- , sur cet intervalle, absurde car f_0 est une sol. maximale !)

* Le graphe de f se déduit de f_0 par l'homothétie de centre 0 et de rapport m :

Visuellement :



ou si l'on préfère : $\begin{pmatrix} \frac{x}{m} \\ f_0\left(\frac{x}{m}\right) \end{pmatrix} \xrightarrow{\times m} \begin{pmatrix} x \\ m f_0\left(\frac{x}{m}\right) \end{pmatrix}$

I.3.b $\beta\beta''=1$ et $\beta>0$ par hypothèse, donc $\beta''(x)>0 \quad \forall x \in I_m$.

β est donc convexe sur I_m . β' est croissante strictement, et comme $\beta'(0)=0$,

β' sera positive sur $I_m \cap \mathbb{R}_+$ et négative sur $I_m \cap \mathbb{R}_-$.

β croîtra sur $I_m \cap \mathbb{R}_+$ et décroîtra sur $I_m \cap \mathbb{R}_-$.

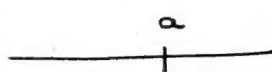
I.4.a

$$* \quad \frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y'' = 2\frac{y'}{y} \Rightarrow y'^2 = 2\ln y + \text{cte}$$

Les conditions $y'(0)=0$ et $y(0)=m$ imposent $\text{cte} = -2\ln m$. Donc :

$$y'^2 = 2\ln \frac{y}{m}$$

$$\boxed{y' = \sqrt{2\ln \frac{y}{m}}} \quad \text{car } y' > 0 \text{ si } x \geq 0$$

* Soit I l'intervalle de définition de β et $a = \sup I$. 

y croît sur $I \cap \mathbb{R}_+$ donc tend vers une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ quand $x \rightarrow a_-$.

$y'' = \frac{1}{y}$ tendra vers $\frac{1}{l} \in \mathbb{R}_+$ qui est fini.

Supposons par l'absurde que $a < +\infty$: l'intégrale $\int_0^a y''$ convergera car y'' tend vers une limite finie pour $x \rightarrow a_-$. Notons $\int_0^a y'' = l' \in \mathbb{R}$.

$y'(t) = \int_0^t y''$ tendra vers $l' \in \mathbb{R}$

Mais $y' = \sqrt{2\ln \frac{y}{m}} \xrightarrow{x \rightarrow a_-} \sqrt{2\ln \frac{l}{m}}$ entraîne $l' = \sqrt{2\ln \frac{l}{m}} \in \mathbb{R}$

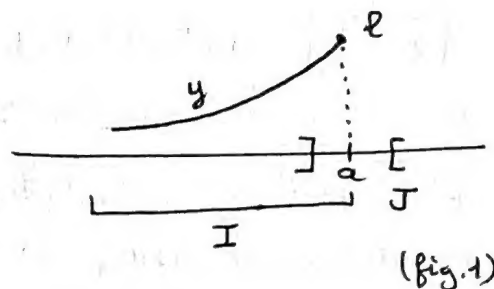
donc $l \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow a_-} y = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a_-} y' = l' \in \mathbb{R}$ et l'on peut prolonger la solution y

en une solution définie au voisinage de a :

Par le Th. de Cauchy - Lipschitz :

Il existe une solution maximale de $z'' = \frac{1}{z}$
 vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} z(a) = l \\ z'(a) = l' \end{cases}$



(fig.1)

Soit $z : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est un int. ouvert contenant a .

La solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge^(*) en une solution sur $I \cup J$ ce qui est contraire à l'hypothèse de maximalité de y ! Donc $a = +\infty$.

De même $\inf I = -\infty$ et f est définie sur \mathbb{R} en entier.

* $f(0) = m$, et f est croissante sur $]0, +\infty[$ et convexe sur \mathbb{R} . On en déduit que $\text{Im} f = [m, +\infty[$.

(*) Précisons ce pt : on pose $h(x) = \begin{cases} y(x) & \text{si } x \leq a \text{ et } x \in I \\ z(x) & \text{si } x \geq a \text{ et } x \in J \end{cases}$.

h est 2 fois dérivable sur $I \cap]-\infty, a[$ et sur $J \cap]a, +\infty[$ (cf fig.1) et vérifie $h'' = \frac{1}{h}$ sur ces 2 intervalles. En a ? h est continue en a et $h(a) = l$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow a_- \\ x \neq a}} h'(x) = l' = \lim_{\substack{x \rightarrow a_+ \\ x \neq a}} h'(x)$ montre que h est dérivable en a et $h'(a) = l'$.

h' sera donc continue au voisinage de a .

On recommence : $h'' = \frac{1}{h} \rightarrow \frac{1}{l} \in \mathbb{R}_+$ pour $x \rightarrow a_-$, $x \neq a$ ou pour $x \rightarrow a_+$, $x \neq a$

h' étant continue au voisinage de a , h' sera dérivable en a et $h''(a) = \frac{1}{l} = \frac{1}{h(a)}$

Concl : h est 2 fois différentiable sur $I \cup J$ et vérifie $h'' = \frac{1}{h}$ en tout point.

I.4.b

$$\frac{x}{y} = F(Y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{m}{y} \int_1^{\frac{y}{m}} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \Leftrightarrow x = m \underbrace{\int_1^{\frac{y}{m}} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}}_{\doteq g(x)} \quad (*)$$

$$\text{Or } g'(x) = \frac{y'}{\sqrt{2 \ln \frac{y}{m}}} = 1 \Rightarrow g(x) = x + cte$$

$$\text{et } g(0) = cte = m \int_1^1 \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} = 0, \text{ donc } (*) \text{ est assurée.}$$

NB : $\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}$ converge (pour $Y \in [1, +\infty[$ fixé) car par le chgt de variable $u = \ln t$, $\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} = \int_0^{\ln Y} \frac{e^u du}{\sqrt{2u}}$.

$$\frac{e^u}{\sqrt{2u}} \sim \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{u}} \quad \text{et } \int_0^{\ln Y} \frac{1}{\sqrt{u}} du \text{ converge.}$$

I.4.c

$$* \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \ln t}} = 0 \text{ donc il existe } A > 0 \text{ tq } t > A \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 \ln t}} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \int_A^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \leq \varepsilon \frac{Y-A}{Y} \leq \varepsilon$$

$$A > 1 \text{ étant fixé, } \int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \text{ converge (car } \frac{1}{\sqrt{2 \ln t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{t-1}}, \text{ ou}$$

en vertu de la NB ci-dessus) donc il existe Y_0 tq

$$Y > Y_0 \Rightarrow \frac{1}{Y} \int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} < \varepsilon$$

$$\text{et donc : } Y > Y_0 \Rightarrow \frac{1}{Y} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \leq \frac{1}{Y} \int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} + \frac{1}{Y} \int_A^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \leq 2\varepsilon$$

$$\text{soit } \lim_{Y \rightarrow +\infty} F(Y) = 0$$

* Si $x \rightarrow +\infty$, $y = f(x) \rightarrow +\infty$ et $Y = \frac{y}{m} \rightarrow +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{y(x)} = \lim_{Y \rightarrow +\infty} F(Y) = 0$$

et les branches infinies de γ seront paraboliques de direction asymptotique l'axe des y .

I.4.d

* Pour tout $Y \in]1, +\infty[$ $F'(Y) = \frac{1}{Y^2} \left(\frac{Y}{\sqrt{2 \ln Y}} - \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \right)$

donc $F'(Y) = 0 \Leftrightarrow \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} - \frac{Y}{\sqrt{2 \ln Y}} = 0$

Posons $\varphi(Y) = \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} - \frac{Y}{\sqrt{2 \ln Y}}$

$$\varphi'(Y) = \frac{1}{\sqrt{2 \ln Y}} - \frac{1 - \frac{1}{2 \ln Y}}{\sqrt{2 \ln Y}} = \frac{1}{2 \ln Y \sqrt{2 \ln Y}} > 0 \quad \forall Y$$

φ est strictement croissante. Comme $\lim_{Y \rightarrow 1^+} \varphi(Y) = -\infty$,

φ s'annulera en une et une seule valeur Y_0 de Y .

NB: Pour cette valeur, on aura :

$$\frac{1}{Y_0} \int_1^{Y_0} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} = \frac{1}{\sqrt{2 \ln Y_0}}$$

ie $\boxed{F(Y_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \ln Y_0}}}$

* $F(Y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dY} F(Y)}_{F'(Y) \cdot \frac{dY}{dx}} = \frac{y - xy'}{y^2} \quad \text{où } Y = \frac{y}{m}$

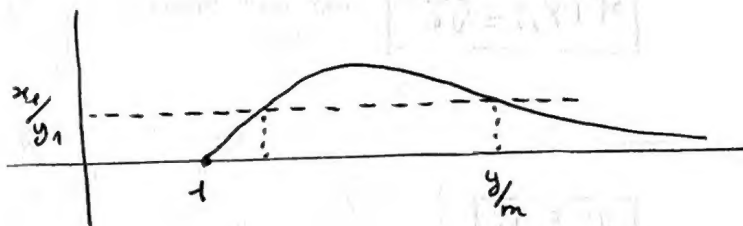
$$\Rightarrow F'(Y_0) = 0 = y_0 - x_0 y'_0 \Rightarrow \boxed{y'_0 = \frac{y_0}{x_0}} \text{ comme désiré.}$$

I.4.e

$$* (x_1, y_1) \in \gamma \Leftrightarrow \exists m / y_1 = \beta(x_1) \Leftrightarrow \exists m \quad \frac{x_1}{y_1} = F\left(\frac{y_1}{m}\right) \quad (\text{et } y_1 > m \text{ pour que } \frac{y_1}{m} \in \text{Def } F)$$

I.4.d montre que $F'(Y)$ est strictement décroissante et s'annule seulement en Y_0 , soit :

Y	1	Y_0	$+\infty$
F'	+	0	-
F	0	$\nearrow F(Y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}} \searrow 0$	0



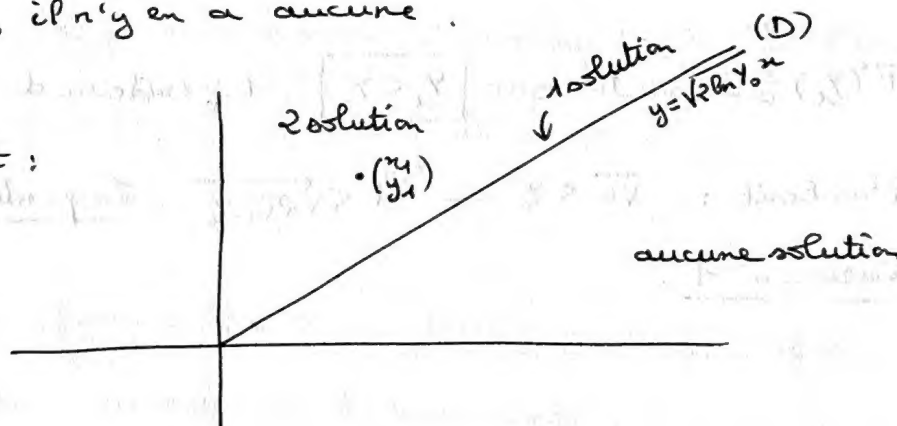
D'où la discussion :

- Si $\frac{x_1}{y_1} \in [0, \frac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}[$, il y a 2 courbes passant par (x_1, y_1)

- Si $\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}$, il y en a une seulement

- Si $\frac{x_1}{y_1} > \frac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}$, il n'y en a aucune.

Graphiquement :



* Si $Y = Y_0$, on a (I.4.b) : $\beta'(x) = \frac{y}{x} = \frac{1}{F(Y_0)} = \sqrt{2\ln Y_0}$, ce qui et (I.4.d)

prouve que toutes les courbes γ de Γ_1 sont tangentes à (D).

I.5.a

$$p'(y) = \frac{2 \ln y - 1}{2 \ln y \sqrt{2 \ln y}} \text{ s'annule en } y_1 \text{ tq } \ln y_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = e^{\frac{1}{2}}, \text{ d'où le}$$

Tableau de variation :

y	1	y_1	$+\infty$
p'		0	
p		$+\infty \rightarrow \sqrt{e} \nearrow +\infty$	

$$p(y_1) = \sqrt{e}$$

I.5.b

Par le chgt de variable $t = e^{\frac{u^2}{2}}$, $\int_1^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} = \int_0^1 e^{\frac{u^2}{2}} du \leq e^{\frac{1}{2}}$

$$F'(y_1) = \frac{1}{y_1^2} \left(\frac{y_1}{\sqrt{2 \ln y_1}} - \int_1^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}} \right) = \frac{1}{e} \left(\sqrt{e} - \underbrace{\int_1^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}}_{\leq \sqrt{e}} \right) \geq 0$$

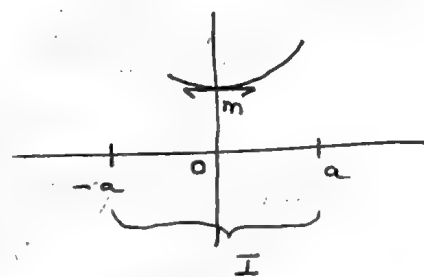
et $F'(y_1) \geq 0$ montre que $y_1 < y_0$ (cf tableau de variation de F en I.4.e)

que l'on écrit : $\sqrt{e} < y_0 \Rightarrow 1 < \sqrt{2 \ln y_0}$. La pente de D est strictement supérieure à 1.

II.6.a Le Th. de Cauchy - Lipschitz assure l'existence d'une et d'une seule solution maximale à l'équation $y'' = y^k$ vérifiant les conditions initiales $y'(0) = 0$ et $y(0) = m$.

II.6.b $g(x) = \beta(-x)$ est définie sur J et $g''(x) = g(x)^k$ est solution de $y'' = y^k$ et vérifie les mêmes conditions initiales que β .
L'unicité de la sol. maximale de $y'' = y^k$ vérifiant ces conditions montre que
1) $J = I$, ie I est symétrique / à 0
2) $\beta(x) = \beta(-x)$, $\forall x \in I$, ie β est paire.

II.6.c



* β est continue sur $I =]-a, a[$, $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$,
et $\beta(0) = m > 0$ de sorte que β soit strictement
positive sur un voisinage U de 0. $\beta'' = \beta^k$ sera
donc strictement positive sur U et β' sera strictement croissante.
Comme $\beta'(0) = 0$, $\beta'(x)$ sera strictement positive sur $U \cap \mathbb{R}_+$ et l'ensemble
$$E = \{x \in [0, a[\mid \beta \text{ croissante sur } [0, x[\}$$

sera non vide.

Si $\text{Sup } E = b < a$, β sera croissante sur $[0, b[$ donc $\beta(b) \geq m > 0$, et
 β étant continue on recommence le raisonnement ci-dessus pour
obtenir que β est croissante sur un voisinage de b , ce qui est absurde.

Donc $\text{Sup } E = a$ et les variations de β sont :

	-a	0	a
β		$\nearrow m \rightarrow$	

* Enfin $\beta'' = \beta^k > 0$ montre que β est convexe sur I .

II.7.a

$$* y'y'' = y'y^k \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y'^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y^{k+1}}{k+1} \right) \Rightarrow \frac{y'^2}{2} - \frac{y^{k+1}}{k+1} = -\frac{m^{k+1}}{k+1}$$

$$\text{d'où } y'^2 = \frac{1}{2} (y^{2\alpha} - m^{2\alpha})$$

$$\text{Si } x \geq 0, y' \geq 0 \text{ donc } y' = \frac{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$* \text{ Ainsi } \frac{y'}{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} x = \int_0^x \frac{y' dx}{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = \int_m^{y(x)} \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$$

$$\text{soit } x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \quad (*)$$

Cette intégrale converge car $u = m+h \Rightarrow u^{2\alpha} = m^{2\alpha} + 2\alpha m^{2\alpha-1}h + o(h)$

$$\Rightarrow u^{2\alpha} - m^{2\alpha} \sim 2\alpha m^{2\alpha-1}h \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha m^{2\alpha-1}h}} \quad \text{et}$$

$$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{h}} \text{ converge.}$$

$$* \text{ Si } \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \text{ converge (en } \infty), \text{ on aura } 0 \leq x \leq \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$$

$$* \text{ I sera borné et } I \subset \left] -\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \right[$$

En fait, I étant l'intervalle maximal de définition de la solution

$$f, \text{ on aura } I = \left] -\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \right[\quad (\text{remonter les calculs})$$

en définissant $y(x)$ par (*) pour x dans cet intervalle $\left] -\int_m^\infty, \int_m^\infty \right[$
et en allant jusqu'à $y'y'' = y'y^k$ ie $y'' = y^k$)

* Si $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ diverge, $\lim_{+\infty} \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = +\infty$ et l'on peut

remonter les calculs (comme précédemment) sans aucune restriction sur x :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe y , unique, $y \geq m$, tel que

$$x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \quad (*)$$

(car $y \mapsto \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ est continue, strictement croissante de $[m, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$)

puis on lit les 2 premiers paragraphes de II.7.a à l'envers: on arrive, après une dérivation et une intégration à $y'y'' = y'y^k$, soit $y'' = y^k$.

$$\underline{\text{Ccl}}: I \text{ borné} \iff \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \text{ converge}$$

$$\text{Comme } \frac{1}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \sim \frac{1}{u^\alpha}, \quad \int_{m+1}^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \text{ converge si } \alpha > 1$$

$$\text{et } \boxed{I \text{ borné} \iff \alpha > 1}$$

* Si I est borné, soit $I =]-a, a[$, alors $\lim_{x \rightarrow a_-} y(x) = +\infty$

(sinon y étant croissante sur $[0, a[$, on aurait $\lim_{x \rightarrow a_-} y(x) = l \in \mathbb{R}$ et l'on

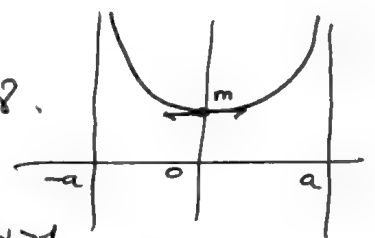
pourrait prolonger la solution maximale y définie sur I à $I \cup J$

où J est un voisinage ouvert de a grâce au Th. de Cauchy-Lipschitz

appliqué à $y'' = y^k$ et pour les conditions initiales $y(a) = l$

$$\text{et } y'(a) = \frac{\sqrt{l^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}$$

~~Il s'ensuit~~ $x = a$ est alors une asymptote verticale à γ .



cas où $\alpha > 1$

II.7.b

$$* \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{\alpha}}{y} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = 0 \quad \text{car } \alpha > 1, \text{ donc } \exists A \quad u \geq A \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\quad}} \leq \varepsilon$$

$$\text{et : } y \geq A \Rightarrow \frac{1}{y} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \leq \frac{1}{y} \int_m^y \varepsilon \, du \leq \varepsilon$$

Quant à $\frac{1}{y} \int_m^A \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ une fois A fixé, il ne pose aucun problème :

$$\exists y_0 \quad y \geq y_0 \Rightarrow \frac{1}{y} \int_m^A \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \leq \varepsilon$$

$$\text{Finalement } y \geq y_0 \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \sqrt{\alpha} \cdot 2\varepsilon$$

$$\text{et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x}{y} = 0.$$

$y(x)$ étant ^{strict.} ~~strict~~ croissante de x , on a par composition des limites et compte tenu de $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ (car c'est (*) qui le montre, x pouvant croître jusqu'à $+\infty$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x}{y}} = +\infty$$

γ possède donc une branche parabolique de dir. asymptotique l'axe Oy .

$$* \quad y' = \frac{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

III.8

(*) de II.7. a s'écrit : $x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$

Par le chgt de variable $t = \frac{u}{m}$, on obtient :

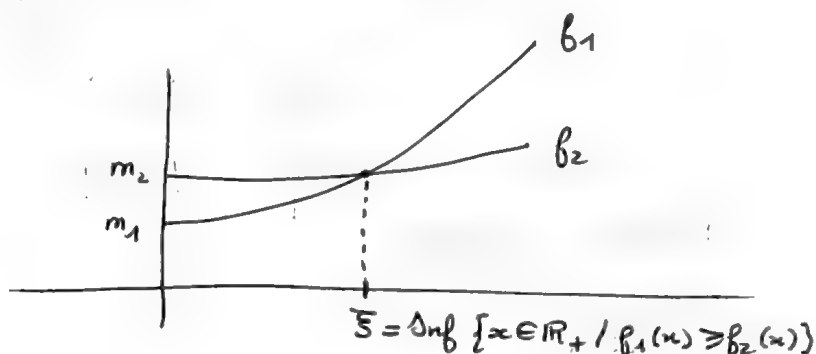
$$x = \sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{m^\alpha} \int_1^{\frac{y}{m}} \frac{m dt}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}}$$

soit $y^{\alpha-1} x = \sqrt{\alpha} \left(\frac{y}{m}\right)^{\alpha-1} \int_1^{\frac{y}{m}} \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}} = F\left(\frac{y}{m}\right)$

III.9.a

Posez $\varphi = \beta_2 - \beta_1$.

Gn a :
$$\begin{cases} \varphi'' = \varphi^k \\ \varphi(0) = m_2 - m_1 > 0 \\ \varphi'(0) = \beta_2'(0) - \beta_1'(0) = 0 \end{cases}$$



Soit $\xi = \inf \{x \in \mathbb{R}_+ / \varphi(x) \leq 0\} > 0$.

$x < \xi \Rightarrow \varphi(x) > 0$ et donc $\varphi(\xi) = 0$.

D'autre part $\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi''(x) > 0$ sur $]0, \xi[\Rightarrow \varphi'$ strict. croissante.

Comme $\varphi'(0) = 0$, φ' sera strict. positive sur $]0, \xi[$. φ sera donc strict. croissante sur $[0, \xi[$ et $\varphi(0) = m_2 - m_1$ entraînera :

$$\forall x \in]0, \xi[\quad \varphi(x) > m_2 - m_1 > 0$$

A la limite :

$$\varphi(\xi) \geq m_2 - m_1 > 0 \quad \text{absurde.}$$

Cof : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(x) \geq 0$ ie $\beta_2(x) \geq \beta_1(x)$

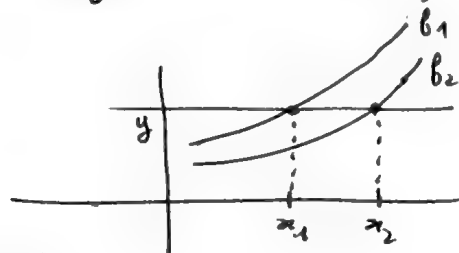
III.9.b

Soient $1 \leq Y_1 < Y_2$, $Y_1 = \frac{y}{m_1}$ et $Y_2 = \frac{y}{m_2}$

Soit x_1 l'abscisse du pt d'ordonnée y sur la courbe $y = \beta_1(x)$ (associée à m_1)
 " x_2 " " $y = \beta_2(x)$ (" m_2)

$$\text{On a } F(Y_2) - F(Y_1) = F\left(\frac{y}{m_2}\right) - F\left(\frac{y}{m_1}\right) = y^{\alpha-1}(x_2 - x_1) > 0 \text{ car}$$

$m_2 < m_1 \Rightarrow \beta_2(x) < \beta_1(x) \quad \forall x$ (8.a) et le dessin :



qui se traduit ainsi :

$$\beta_2(x_1) < \beta_1(x_1) = \beta_2(x_2) = y \Rightarrow x_1 < x_2.$$

F est donc croissante.

III.9.c

~~Si $y \rightarrow +\infty$, x , tel que $y(x) = y$, tendra vers $+\infty$ (on effect, faire tendre y v~~

* Fixons $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$. Le II.7.a montre que I n'est pas borné et que si $y \rightarrow +\infty$, x tendra aussi vers $+\infty$. Alors :

$$F\left(\frac{y}{m}\right) = y^{\alpha-1}x \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{Y \rightarrow +\infty} F(Y) = +\infty$$

Ainsi :

Y	1	$+\infty$
$F(Y)$	0	$\nearrow +\infty$

et F est une bijection (st. croissante) de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

$$* \quad y_1 = \beta(x_1) \Leftrightarrow \exists m \quad F\left(\frac{y_1}{m}\right) = \underbrace{y_1^{\alpha-1}x_1}_{\in \mathbb{R}_+} \Leftrightarrow m = \frac{y_1}{F^{-1}(y_1^{\alpha-1}x_1)}$$

Il existera donc une et une seule courbe γ passant par $(x_1, y_1) \in \mathbb{Q}$.

III.10.a

Soit $h(\delta) = \delta^{-\frac{1}{2}}$. $h'(\delta) = -\frac{1}{2\delta^{3/2}}$ et le Th. des accroissements finis donne :

$$\forall \delta > 1 \quad \frac{1}{\sqrt{\delta-1}} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \leq \sup_{\delta-1 < \theta < \delta} \frac{1}{2\theta^{3/2}} \leq \frac{1}{2(\delta-1)^{3/2}}$$

III.10.b

* Quelques essais nous convainquent d'utiliser :

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{y^{1-\alpha}} \int_2^y \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)y^{1-\alpha}}$$

pour exprimer $\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned} F(y) - \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{y^{1-\alpha}} \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{\sqrt{\alpha}}{y^{1-\alpha}} \int_2^y \frac{dt}{t^\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)y^{1-\alpha}} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha}}{y^{1-\alpha}} \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}}_{\rightarrow 0} + \frac{\sqrt{\alpha}}{y^{1-\alpha}} \left(\underbrace{\int_2^y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \int_2^y \frac{dt}{t^\alpha}}_{\leq \int_2^y \frac{dt}{2(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}} \right) - \underbrace{\frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)y^{1-\alpha}}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

et tout revient à montrer que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^{1-\alpha}} \int_2^y \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}} = 0$.

* On désire montrer $t^{2\alpha}-1$, or : $t^{2\alpha}-1 \geq \frac{1}{2}t^{2\alpha} \Leftrightarrow t \geq 2^{\frac{1}{2\alpha}}$

ce qui nous engage à écrire

$$\frac{1}{y^{1-\alpha}} \int_2^y \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}} = \underbrace{\frac{1}{y^{1-\alpha}} \int_2^{2^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{y^{1-\alpha}} \int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^y \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}}_{\text{à étudier}}$$

Maintenant :

$$\int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^Y \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^Y \frac{dt}{\frac{t^{3\alpha}}{2^{\frac{3}{2}}}} = 2^{\frac{3}{2}} \int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^Y t^{-3\alpha} dt$$

$$\leq \frac{2^{\frac{3}{2}}}{1-3\alpha} \left(Y^{1-3\alpha} - 2^{\frac{1-3\alpha}{2\alpha}} \right) \quad \text{si } \alpha \neq \frac{1}{3}$$

d'où $\frac{1}{Y^{1-\alpha}} \int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^Y \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2^{\frac{3}{2}}}{1-3\alpha} \cdot \left(Y^{-2\alpha} - \frac{2^{\frac{1-3\alpha}{2\alpha}}}{Y^{1-\alpha}} \right) \xrightarrow{(Y \rightarrow +\infty)} 0$

car $0 < \alpha < 1$

Reste à voir le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$: alors

$$\frac{1}{Y^{1-\alpha}} \int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^Y \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2^{\frac{3}{2}}}{Y^{1-\alpha}} (\ln Y - \ln 2^{\frac{1}{2\alpha}}) \text{ tendra aussi vers } 0$$

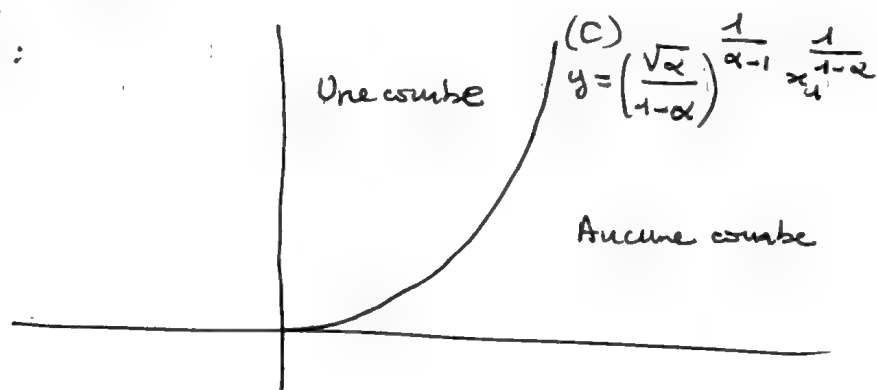
pour Y tendant vers $+\infty$. CQFD

III.10.c Ainsi F est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $\left[0, \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right[$ dès que $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$.

(x_1, y_1) est sur une courbe si $\exists m \quad y_1^{\alpha-1} x_1 = F\left(\frac{y_1}{m}\right)$. Donc :

- 1) Si $y_1^{\alpha-1} x_1 < \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$, une et une seule courbe γ_m passe par (x_1, y_1)
- 2) Si $y_1^{\alpha-1} x_1 \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$, aucune courbe ne passe par (x_1, y_1) .

Graphiquement :



III.11.a

$$F(Y) = \sqrt{\alpha} Y^{\alpha-1} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}$$

$$F'(Y) = \sqrt{\alpha} \left((\alpha-1) Y^{\alpha-2} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + Y^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right) \quad \text{s'annule si}$$

$$\underbrace{(\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}}_{\doteq \Phi(Y)} = 0$$

$$\Phi'(Y) = \frac{-\alpha}{(Y^{2\alpha}-1)\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} < 0 \quad \forall Y > 1, \text{ donc } \Phi \text{ est strictement décroissante}$$

sur $]1, +\infty[$, et $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \Phi(Y) = +\infty$, donc F s'annule au plus en une valeur de $Y \in]1, +\infty[$.

III.11.b

* Par le Th. de Rolle, il existe $c \in]\delta-1, \delta[$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{\delta-1}} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{2c^{3/2}} \geq \frac{1}{2\delta^{3/2}} \quad \forall \delta > 1$$

2^e méthode : L'inégalité proposée équivaut à :

$$\frac{\sqrt{\delta} - \sqrt{\delta-1}}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta-1}} \geq \frac{1}{2\delta^{3/2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\delta\sqrt{\delta-1} + (\delta-1)\sqrt{\delta}} \geq \frac{1}{2\delta^{3/2}} \Leftrightarrow 2\delta^{3/2} \geq \delta\sqrt{\delta-1} + (\delta-1)\sqrt{\delta}$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}} + \frac{\delta-1}{\delta} \quad \text{ce qui est trivial car si } \delta > 1, \quad \frac{\delta-1}{\delta} = 1 - \frac{1}{\delta} \leq 1.$$

$$* Y^{2-\alpha} F'(Y) = \sqrt{\alpha} \left((\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right) \leq \sqrt{\alpha} \left((\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{2t^{3\alpha}} + (\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{t^\alpha} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right)$$

(en utilisant la formule ci-dessus)

d'où :

$$\begin{aligned}
 y^{2-\alpha} F'(y) &\leq \sqrt{\alpha} \left(\underbrace{\frac{\alpha-1}{2} \int_1^y \frac{dt}{t^{3\alpha}}}_{\frac{1}{1-3\alpha} (y^{1-3\alpha} - 1)} + (\alpha-1) \underbrace{\int_1^y \frac{dt}{t^\alpha}}_{\frac{1}{1-\alpha} (y^{1-\alpha} - 1)} + \frac{y}{\sqrt{y^{2\alpha}-1}} \right) \\
 &\leq \sqrt{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{2(1-3\alpha)} + 1 \right) + \underbrace{\sqrt{\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{2(1-3\alpha)} y^{1-3\alpha} - y^{1-\alpha} + \frac{y}{\sqrt{y^{2\alpha}-1}} \right)}_{\doteq C_\alpha} \\
 &= \left(C_\alpha + \frac{1}{2} \right) y^{1-3\alpha} + o(y^{1-3\alpha}) \\
 &= \frac{-\alpha}{1-3\alpha} y^{1-3\alpha} + o(y^{1-3\alpha}) \\
 &\rightarrow -\infty \quad (y \rightarrow +\infty)
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{2-\alpha} F'(y) = -\infty$

2^e cas : Si $\alpha = \frac{1}{3}$, on procède de même :

$$\begin{aligned}
 y^{2-\alpha} F'(y) &\leq \sqrt{\alpha} \left(\underbrace{-\frac{2}{3} \int_1^y \frac{dt}{t}}_{\ln y} - \frac{2}{3} \underbrace{\int_1^y \frac{dt}{t^{1/3}}}_{\frac{3}{2} (y^{2/3} - 1)} + \frac{y}{\sqrt{y^{2/3}-1}} \right) \\
 &\leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} + \underbrace{\sqrt{\alpha} \left(-\frac{2}{3} \ln y - y^{2/3} + \frac{y}{\sqrt{y^{2/3}-1}} \right)}_{\rightarrow -\infty} \\
 &= y^{2/3} + \frac{1}{2} + o(1) \quad (y \rightarrow +\infty) \\
 &\leq \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha}}{2} 3 - \frac{2}{3} \sqrt{\alpha} \ln y + \frac{1}{2}}_{\rightarrow -\infty \quad (y \rightarrow +\infty)} + o(1)
 \end{aligned}$$

et le résultat est $\boxed{\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{2-\alpha} F'(y) = -\infty}$ dans tous les cas.

III.11.c

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$, $\lim_{Y \rightarrow +\infty} Y^{2-\alpha} F'(Y) = -\infty$ montre que $F'(Y)$ sera négatif pour Y voisin de $+\infty$, et $\lim_{Y \rightarrow 1+} F'(Y) = +\infty$. F' étant continue sur $]1, +\infty[$, elle s'annulera en une seule valeur $Y_0 \in]1, +\infty[$.

On l'expression de $F'(Y)$ en III.11.a :

$$F'(Y_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1) Y_0^{\alpha-2} \int_1^{Y_0} \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + Y_0^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{Y_0^{2\alpha}-1}} = 0$$

$$(\alpha-1) Y_0^{-1} F(Y_0) = \frac{-\sqrt{\alpha} Y_0^{\alpha-1}}{\sqrt{Y_0^{2\alpha}-1}}$$

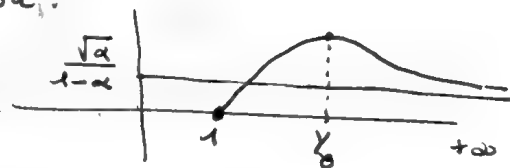
$$F(Y_0) = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} \cdot \frac{Y_0^{\alpha}}{\sqrt{Y_0^{2\alpha}-1}}$$

III.11.d

$$(x_1, y_1) \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \exists m \quad y_1^{\alpha-1} x_1 = F\left(\frac{y_1}{m}\right)$$

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$, F' s'annule en une seule valeur Y_0 d'où :

Y	1	Y_0	$+\infty$
F'		0	
F	0	$\nearrow F(Y_0) \searrow \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$	



(où $F(Y_0)$ donné ci-dessus)

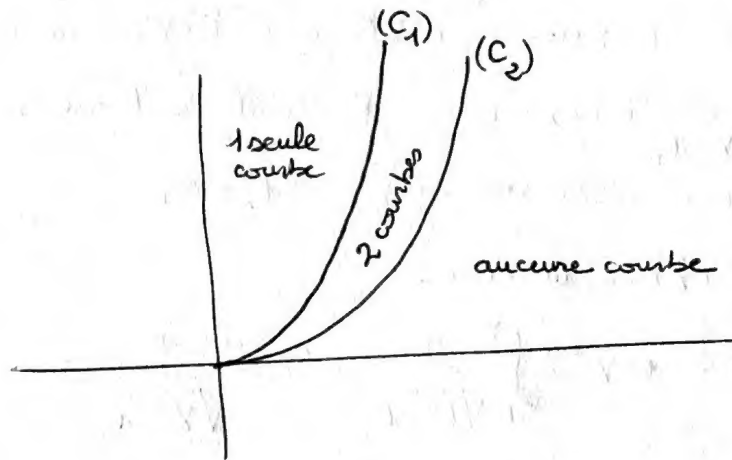
d'où la discussion :

- Si $y_1^{\alpha-1} x_1 \in [0, \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}]$, une seule courbe passe par (x_1, y_1)
- Si $y_1^{\alpha-1} x_1 \in]\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}, F(Y_0)[$, 2 courbes conviennent.
- Si $y_1^{\alpha-1} x_1 = F(Y_0)$, une seule courbe.
- Si $y_1^{\alpha-1} x_1 > F(Y_0)$, aucune.

Graphiquement, les courbes permettant de distinguer ces différents cas sont :

$$y_1^{\alpha-1} x_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} \Leftrightarrow y_1 = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot x_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (C_1)$$

et $y_1^{\alpha-1} x_1 = F(y_0) \Leftrightarrow y_1 = F(y_0)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot x_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (C_2)$



III.12.a

* Cette intégrale est convergente en 1 car $\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}$ est définie et $\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}$ converge (puisque $\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha(t-1)}}$ et $\int_1^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ converge.)

Au voisinage de $+\infty$: $h = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned} v(t) &\doteq \frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha \sqrt{1-h^{2\alpha}}} - h^\alpha = h^\alpha \left((1-h^{2\alpha})^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= h^\alpha \left(\frac{1}{2} h^{2\alpha} + o(h^{2\alpha}) \right) = \frac{1}{2} h^{3\alpha} + o(h^{3\alpha}) \end{aligned}$$

d'où $v(t) \sim \frac{1}{2t^{3\alpha}}$

$3\alpha > 1$ donc $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3\alpha}}$ converge et $\int_1^\infty v(t) dt$ aussi.

* Décroissance de $\varphi(\alpha)$ $= \int_1^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right)}_{\doteq v(t)} dt + \frac{1}{\alpha-1}$ pour $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

$\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha-1}$ est décroissante, et $v(t) = \frac{t^\alpha - \sqrt{t^{2\alpha}-1}}{t^\alpha \sqrt{t^{2\alpha}-1}} = \frac{1}{t^\alpha \sqrt{t^{2\alpha}-1} (t^\alpha + \sqrt{t^{2\alpha}-1})}$

aussi parce que $\alpha \mapsto t^\alpha$ et $\alpha \mapsto \sqrt{t^{2\alpha}-1}$ sont croissantes.

* $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt - 2$
 $= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t-1}} - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} - 2$
 $= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} - 2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt - 2 = 0$

* Donc $\varphi > 0$ sur $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.

III.12.b

* $F'(Y) = \sqrt{\alpha} \left((\alpha-1) Y^{\alpha-2} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y^{\alpha-1}}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right)$ (d'après III.11.a)

Ainsi $\text{Sgn } F'(Y) = \text{Sgn } \varphi(Y)$ où $\varphi(Y) \doteq (\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}$.

$\lim_{Y \rightarrow 1+} \varphi(Y) = +\infty$ et φ est continue sur $]1, +\infty[$. Montrer qu'elle s'annule

sur cet intervalle revient à prouver que $\varphi(Y)$ prend des valeurs négatives.

(III.11.a) permettra alors de conclure à la nullité de $\varphi(Y)$ en une seule valeur de Y .

* Montrons donc que $\varphi(Y)$ prend des valeurs négatives sur $]1, +\infty[$:

On a vu (12.a) :

$$\forall \alpha : \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right) dt + \frac{1}{\alpha-1} > 0$$

donc :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists Y_0 \quad Y > Y_0 \Rightarrow \int_1^Y \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right) dt + \frac{1}{\alpha-1} > \varepsilon$$

Ainsi, pour $Y > Y_0$:

$$(\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - (\alpha-1) \underbrace{\int_1^Y \frac{1}{t^\alpha} dt}_{\frac{Y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}} + 1 < (\alpha-1) \varepsilon$$

que l'on arrange :

$$(\alpha-1) \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} < -Y^{1-\alpha} + (\alpha-1) \varepsilon$$

$$\text{d'où } \varphi(Y) < \underbrace{\frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}} - Y^{1-\alpha} + (\alpha-1) \varepsilon$$

on cherche le dév. de cette expression ($h = \frac{1}{Y}$ etc)
on obtient $\frac{1}{2} Y^{1-3\alpha} + o(Y^{1-3\alpha})$

$$\varphi(Y) < \underbrace{\frac{1}{2} Y^{1-3\alpha} + o(Y^{1-3\alpha})}_{\rightarrow 0 \text{ (} Y \rightarrow +\infty \text{)}} + \underbrace{(\alpha-1) \varepsilon}_{< 0}$$

$$\text{D'où } \varphi(Y) < (\alpha-1) \varepsilon < 0 \quad \text{pour } Y > Y_0.$$

CQFD

III.12.c On obtient le m^{ême} tableau de variation qu'en III.11.d, ^{donc} _{plus} les mêmes résultats

Indications

II.7.a • Démarrer avec $y'y'' = y'y^k$, qui sont les dérivées de ...

en déduire $x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$.

• Pour quelles valeurs de α , I est-il borné ?

Faire intervenir l'intégrale impropre $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$, et raisonner en 2 temps :

- Si $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ converge, alors $I \cap \mathbb{R}_+ \subset [0, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} [$ et

la solution étant maximale, $I =] - \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} [$ est borné.

- Si I n'est pas borné, $I = \mathbb{R}_+$, montrer que $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ diverge.

II.7.b

Chercher d'abord $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x}{y}$ grâce à $x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ (7.a)

III.11.b Montrer que $\lim_{Y \rightarrow +\infty} Y^{2-\alpha} F'(Y) = -\infty$ en majorant $Y^{2-\alpha} F'(Y)$ grâce à l'inégalité de l'énoncé.